

## ETUDE DE SYNTHÈSE

### 1. Contexte technologique et modélisation.

Nous allons nous intéresser dans ce problème au déplacement d'une charge par un pont roulant.

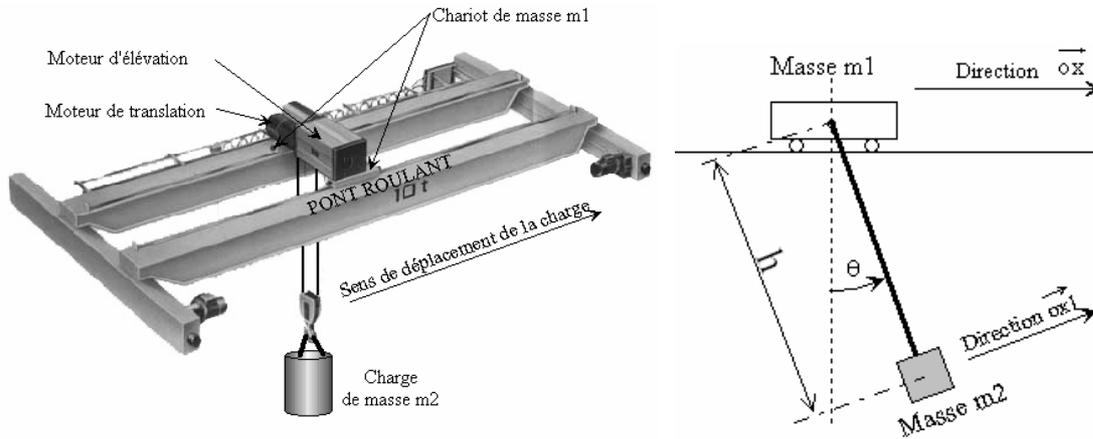


Figure 1

La charge étant considérée à une hauteur fixe connue, le mouvement transversal du chariot va provoquer des oscillations indésirables de la charge  $m_2$ . Pour effectuer l'asservissement de position de la masse  $m_2$  et atteindre l'emplacement désiré vous allez élaborer une commande adéquate du chariot.

L'entraînement a lieu par l'intermédiaire d'un moteur et d'un réducteur de vitesse. Une commande vectorielle assure un pilotage de couple de moteur asynchrone. Ce couple, via un réducteur, exerce une force  $F$  sur le chariot. Dans la suite de ce problème, vous ne considérerez pas la commande du moteur et prendrez comme grandeur de contrôle la force  $F$ .

#### Notations :

$F$ (N)	Force développée par le moteur dans la direction du mouvement.
$m_1$ (Kg)	Masse du chariot.
$m_2$ (Kg)	Masse de la charge.
$b$ (Ns/m)	Coefficient de frottement fluide s'opposant au mouvement du chariot.
$c$ (Ns/rad)	Coefficient de frottement s'opposant à la rotation pendulaire de la charge.
$h$ (m)	Distance de la masse $m_2$ au pont roulant.
$g$ ( $m/s^2$ )	Accélération de la pesanteur.
$J$ ( $Kg \cdot m^2$ )	Moment d'inertie de la charge $m_2$ par rapport à son point d'attache.
$x$ (m)	Déplacement du chariot.
$d$ (m)	Aplomb de la charge $m_2$ dans la direction $ox$ .

#### Données du problème :

$$m_1 = 200 \text{ Kg}, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2, \quad b = 1000 \text{ Ns/m}, \quad c = 10 \text{ Ns/rad}.$$

La force  $F$  peut s'exercer dans les deux sens et sera limité à 10000 N.

La charge admissible  $m_2$  est comprise entre 20 kg (poids du crochet) et 10 t. La hauteur  $h$  est comprise entre 1m (position haute) et 6m (position basse).

Maintenant que les principales données liées aux mouvements de la charge et du chariot sont posées, il faut établir les équations différentielles découlant des théorèmes fondamentaux de la dynamique. Pour cela nous allons isoler le chariot et la charge et étudier les différentes forces et accélérations les régissant.

### 1.1. Modélisation du pont roulant.

#### □ Mouvement de la charge.

La charge est soumise à un mouvement pendulaire, au point d'attache, les forces de réactions du chariot peuvent se décomposer en une force  $R$  colinéaire avec le mouvement du chariot et une force  $P$  de réaction verticale. La charge quant à elle n'est soumise qu'à son propre poids et une force de frottement fluide  $c \cdot \dot{\theta}$  s'oppose au mouvement (Fig 2a).

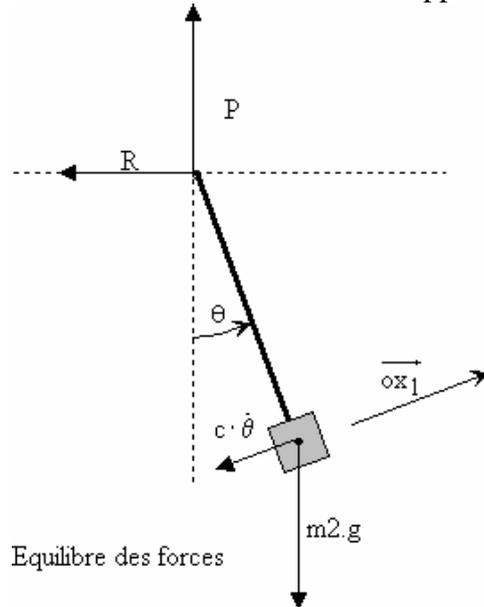


Figure 2a

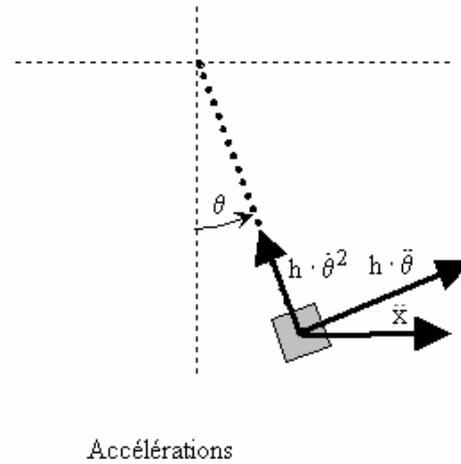


Figure 2b

La masse  $m_2$  subit trois composantes d'accélération, une dans la direction du mouvement du chariot ( $\ddot{x}$ ), deux dues au mouvement pendulaire, la première tangentielle ( $h \cdot \ddot{\theta}$ ) et l'autre centripète ( $h \cdot \dot{\theta}^2$ ) (cf Fig 2b).

Si nous écrivons l'équation fondamentale de la dynamique dans la direction  $\overline{ox}$ , il vient :

$$-R - c \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) = m_2 \left( \ddot{x} + h \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - h \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \right) \quad (1.1)$$

Sur la direction  $\overline{ox_1}$  perpendiculaire au pendule nous obtenons :

$$P \cdot \sin(\theta) - R \cdot \cos(\theta) - m_2 \cdot g \cdot \sin(\theta) - c \cdot \dot{\theta} = m_2 \cdot h \cdot \ddot{\theta} + m_2 \cdot \ddot{x} \cdot \cos(\theta) \quad (1.2)$$

$$\text{Sachant que le moment d'inertie de ce pendule vaut } J = m_2 \cdot h^2. \quad (1.3)$$

Autour de son centre de gravité nous pouvons écrire :

$$J \cdot \ddot{\theta} = R \cdot h \cdot \cos(\theta) - P \cdot h \cdot \sin(\theta) \quad (1.4)$$

Pour éliminer les composantes  $R$  et  $P$  en reportant dans (1.2) (1.4) nous obtenons :

$$-\frac{J \cdot \ddot{\theta}}{h} - m_2 \cdot g \cdot \sin(\theta) - c \cdot \dot{\theta} = m_2 \cdot h \cdot \ddot{\theta} + m_2 \cdot \ddot{x} \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{soit : } \ddot{\theta} \left( J + m_2 \cdot h^2 \right) + c \cdot h \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot h \cdot \sin(\theta) = -m_2 \cdot h \cdot \ddot{x} \cdot \cos(\theta) \quad (1.5)$$

□ Mouvement du chariot.

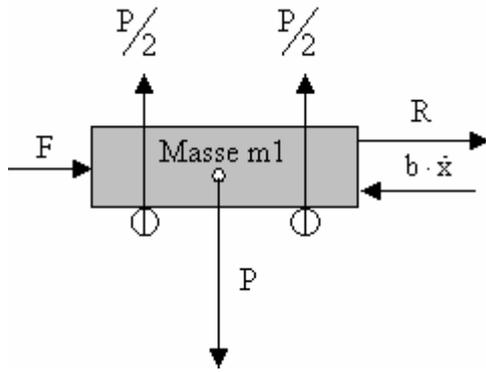


Figure 3

Sur l'axe vertical il n'y a aucun mouvement, les forces s'équilibrent entre le poids du chariot et les réactions des roues.

Dans la direction du mouvement nous avons trois forces : la première  $F$ , correspond à la force motrice du moteur, la seconde  $(b \cdot \dot{x})$  est le frottement fluide s'opposant au mouvement, la troisième  $R$ , est la réaction de la charge sur le chariot.

Sur l'axe horizontal  $\overline{ox}$  l'équation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$m_1 \cdot \ddot{x} = F + R - b \cdot \dot{x} \quad (1.6)$$

Dans l'équation (1.6) reportons la valeur de la réaction  $R$  issue de l'équation différentielle (1.1) liée au repère  $ox$ , nous obtenons :

$$\ddot{x}(m_1 + m_2) + b \cdot \dot{x} = F - m_2 \cdot h \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - c \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + m_2 \cdot h \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \quad (1.7)$$

Mouvement de l'ensemble.

Le déplacement  $x$  (Eq (1.5)) et la rotation  $\theta$  (Eq (1.7)) sont régis par deux équations différentielles du second ordre couplées entre elles :

$$\ddot{\theta} \left( J + m_2 \cdot h^2 \right) + c \cdot h \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot h \cdot \sin(\theta) = -m_2 \cdot h \cdot \ddot{x} \cdot \cos(\theta) \quad (1.5)$$

$$\ddot{x} (m_1 + m_2) + b \cdot \dot{x} = F - m_2 \cdot h \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - c \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + m_2 \cdot h \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \quad (1.7)$$

La position recherchée par l'utilisateur est l'aplomb de la charge  $m_2$  soit

$$d = x + r \cdot \sin(\theta) \quad (1.8)$$

Les équations (1.5) et (1.7) sont respectivement de la forme  $\ddot{\theta} = f_2(\ddot{x})$  et  $\ddot{x} = f_1(\ddot{\theta})$ . Pour les simuler, il faut les mettre sous une forme ne nécessitant que des intégrateurs, il apparaît alors dans le schéma de simulation deux boucles algébriques. Afin de lever cette difficulté, il est impératif de résoudre ces deux équations pour trouver des expressions causales. La résolution de ces deux équations différentielles donne :

$$\ddot{\theta} = \frac{h \left[ -b \cdot m_2 \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{x} + c \left( m_1 + m_2 - m_2 \cdot \cos^2(\theta) \right) \cdot \dot{\theta} + h \cdot m_2^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + \right]}{h^2 \cdot m_2^2 \cdot \cos^2(\theta) - (m_1 + m_2) \left( J + h^2 \cdot m_2 \right)} + \frac{h \left[ m_2 \left( F \cdot \cos(\theta) + g \cdot m_1 \cdot \sin(\theta) + g \cdot m_2 \cdot \sin(\theta) \right) \right]}{h^2 \cdot m_2^2 \cdot \cos^2(\theta) - (m_1 + m_2) \left( J + h^2 \cdot m_2 \right)} \quad (1.9)$$

$$\ddot{x} = \frac{-h^2 \cdot m_2 \cdot \cos(\theta) \left( c \cdot \dot{\theta} + g \cdot m_2 \cdot \sin(\theta) \right) - \left( J + h^2 \cdot m_2 \right) \left( F - b \cdot \dot{x} - c \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} + h \cdot m_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 \right)}{h^2 \cdot m_2^2 \cdot \cos^2(\theta) - (m_1 + m_2) \left( J + h^2 \cdot m_2 \right)} \quad (1.10)$$

Nous pouvons constater au regard des relations (1.9) et (1.10) qu'elles ont pour forme :  $\ddot{\theta} = f_2(\ddot{x})$ ,  $\ddot{x} = f_4(\dot{x}, \theta, \dot{\theta})$  ce qui ne pose plus de problèmes pour établir le schéma de simulation.

## 1.2. Modèle linéarisé du pont roulant.

Si l'angle  $\theta$  est faible nous pouvons poser :  $\sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$ ,  $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Pour la position angulaire et le déplacement  $x$  de la charge, les équations différentielles (1.5) (1.7) et (1.8) deviennent :

$$\ddot{\theta} \left( J + m_2 \cdot r^2 \right) + c \cdot h \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot h \cdot \theta = -m_2 \cdot h \cdot \ddot{x} \quad (1.11)$$

$$\ddot{x} (m_1 + m_2) + b \cdot \dot{x} = F - m_2 \cdot h \cdot \ddot{\theta} - c \cdot \dot{\theta} \quad (1.12)$$

$$d = x + h \cdot \sin(\theta) \approx x + h \cdot \theta \quad (1.13)$$

Comme précédemment nous avons des boucles algébriques pour programmer ces deux équations différentielles. En les résolvant pour obtenir les dérivées secondes sur l'angle et le déplacement nous obtenons :

$$\ddot{\theta} = \frac{h \left[ -F \cdot m_2 - \theta \cdot m_2 \cdot g (m_1 + m_2) - \dot{\theta} \cdot c \cdot m_1 + \dot{x} \cdot b \cdot m_2 \right]}{h^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + J(m_1 + m_2)} \quad (1.14)$$

$$\ddot{x} = \frac{F \left( J + m_2 \cdot h^2 \right) - \dot{x} \cdot b \left( J + m_2 \cdot h^2 \right) + \theta \cdot g \cdot m_2^2 \cdot h^2 - \dot{\theta} \cdot c \cdot J}{h^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + J(m_1 + m_2)} \quad (1.15)$$

A partir de deux équations différentielles et de la relation (1.13), il est facile de définir un schéma de simulation assurant la simulation des régimes dynamiques du pont roulant.

## 1.3. Modélisation par l'intermédiaire de transmittances.

Nous venons d'établir deux formes différentes des équations différentielles du comportement linéarisé du pont roulant :

La première forme est issue de la transcription de l'équation fondamentale de la dynamique (équations (1.11) et (1.12)).

La seconde forme, extraite de la précédente, assure une simulation sans boucles algébriques (équations (1.14) et (1.15)).

A partir de celles-ci nous en allons extraire des formulations sous forme de transmittances.

### Formulation 1

Les équations différentielles (1.11)&(1.12) permettent de définir les fonctions de transfert suivantes :

$$H_3(p) = \frac{\theta(p)}{X(p)} = - \frac{m_2 \cdot h \cdot p^2}{\left( J + m_2 \cdot h^2 \right) p^2 + c \cdot h \cdot p + m_2 \cdot g \cdot h} \quad (1.16)$$

$$X(p) = H_1(p) \cdot F(p) - H_2(p) \cdot \theta(p) \quad (1.17)$$

$$X(p) = \frac{1}{(m_1 + m_2) p^2 + b \cdot p} F(p) - \frac{m_2 \cdot h \cdot p + c}{(m_1 + m_2) p + b} \theta(p) \quad (1.18)$$

**Formulation 2**

A partir des équations (1.14) et (1.15) avec la transformée de Laplace nous obtenons :

$$\theta(p) = -G_1(p) \cdot F + G_2(p) \cdot X(p) \quad (1.19)$$

$$\theta(p) = -\frac{h \cdot m_2}{p^2 \left( h^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + J(m_1 + m_2) \right) + p \cdot c \cdot m_1 \cdot h + m_2 \cdot g \cdot h(m_1 + m_2)} \cdot F$$

$$+ \frac{p \cdot b \cdot m_2 \cdot h}{p^2 \left( h^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + J(m_1 + m_2) \right) + p \cdot c \cdot m_1 \cdot h + m_2 \cdot g \cdot h(m_1 + m_2)} X(p) \quad (1.20)$$

$$X(p) = G_3(p) \cdot F + G_4(p) \cdot \theta(p) \quad (1.21)$$

$$X(p) = \frac{(J + m_2 \cdot h^2)}{p^2 \left( h^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + J(m_1 + m_2) \right) + p \cdot b \left( J + m_2 \cdot h^2 \right)} F$$

$$+ \frac{g \cdot m_2^2 \cdot h^2 + p \cdot c \cdot J}{p^2 \left( h^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + J(m_1 + m_2) \right) + p \cdot b \left( J + m_2 \cdot h^2 \right)} \theta(p) \quad (1.22)$$

Nota : Avec cette formulation vous pourrez aisément modéliser sous Matlab Simulink le comportement linéarisé du pont roulant.

**Formulation 3.**

Pour commander notre système, il est nécessaire d'exprimer la fonction de transfert complète

$$H_5(p) = \frac{D(p)}{F(p)}$$

Nous allons ici exprimer la fonction de transfert globale reliant le déplacement  $d$  à la force motrice  $F$ . En utilisant les relations (1.16), (1.18) et (1.13) la transmittance se met sous la forme :

$$H_5(p) = \frac{D(p)}{F(p)} = \frac{H_1(p)(1 + h \cdot H_3(p))}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)} \quad (1.23)$$

En développant les expressions formelles des transmittances, nous obtenons :

$$(1.24)$$

$\frac{D(p)}{F(p)} = \frac{J \cdot p^2 + c \cdot h \cdot p + m_2 \cdot g \cdot h}{p^4 \left( J(m_1 + m_2) + m_1 \cdot m_2 \cdot h^2 \right) + p^3 \left( J \cdot b + m_1 \cdot c \cdot h + m_2 \cdot b \cdot h^2 \right) + p^2 \left( b \cdot c \cdot h + m_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot h + m_2^2 \cdot g \cdot h \right) + p(m_2 \cdot b \cdot g \cdot h)}$
--

**Préambule.**

Ce projet se veut très ouvert dans sa rédaction. A partir du canevas des principales étapes à suivre, vous avez toutes libertés pour les traiter avec la finesse et la pertinence que vous jugerez utile.

Lors des étapes méthodologiques, vous devrez vérifier par des simulations sur Matlab Simulink la justesse de vos approches.

Pour la rédaction de ce projet, j'aimerais que vous sépariez la rédaction proprement dite qu'il serait bon de limiter à 5 à 6 pages, des simulations que vous mettrez en annexes.

**Objectif.**

Déplacer une charge de masse variable ( $10 \text{ Kg} \leq m_2 \leq 10000 \text{ Kg}$ ) sur une distance de 0 à 15 mètres, la longueur  $h$  pouvant évoluer de 1 mètre à 10 mètres. La consigne de déplacement doit être atteinte en un temps minimum avec le moins d'oscillations possibles. Vous veillerez à ce que la commande ne demande pas une force  $F$  supérieure à ce que peut fournir le moteur. La charge  $m_2$  est mesurée par des jauges de contraintes donnant un résultat à  $\pm 50 \text{ Kg}$ .

La hauteur  $h$  et l'angle  $\theta$  sont mesurés.

La puissance du moteur permet d'appliquer une force qui ne peut pas être supérieure à 10000 N.

**CANEVAS**1. Analyse du système réel.

- Analyse temporelle.

Pour différentes charges et pour différentes hauteurs, vous analyserez les résultats obtenus et en justifierez les formes.

Dans un premier temps vous considérerez le chariot immobile et ensuite le système complet.

2. Analyse du système linéarisé.

- Modélisation.

Vous modéliserez, soit à partir des équations différentielles, soit à partir de transmittances le comportement linéarisé du pont roulant. Ce modèle comportera une entrée constituée de la force motrice  $F$  et de 3 sorties (l'angle  $\theta$ , le déplacement  $x$ , et la position de la charge  $d$ ). Vous vérifierez ensuite la validité du modèle linéarisé vis-à-vis du modèle réel.

- Modélisation par variables d'état. (Point à traiter ultérieurement).

La modélisation que vous avez faite précédemment correspondait à une transcription des équations différentielles ou à une formulation par transmittance. A partir des 2 équations différentielles régissant le mouvement du pont roulant et de sa charge, déterminez le modèle d'état correspondant. Vérifiez que vous obtenez les mêmes résultats que précédemment. A quoi correspondent les valeurs propres de la matrice d'état ?

- Etude des pôles et des zéros.

La variation de la charge  $m_2$  et de la hauteur  $h$  modifie considérablement le comportement dynamique, afin d'en évaluer l'évolution pour différentes charges et hauteur analysez l'évolution des pôles et des zéros en fonction du point de fonctionnement.

Cette étude préliminaire étant faite, vous allez faire la synthèse d'un correcteur pour une charge  $m_2$  fixe et une hauteur  $h$  constante.

Ces valeurs étant fixées, le processus à commander est à paramètres constants pour faire la synthèse de la commande, je vous propose les étapes méthodologiques suivantes :

3. Discretisation du processus.

- Choix de la période d'échantillonnage.
- Vérification dans les domaines fréquentiels et/ou temporel de la validité de ce choix.
- Etude des pôles et des zéros pour le point de fonctionnement que vous avez choisi.

4. Choix et synthèse du correcteur.

Il est probable qu'ici un correcteur de type RST soit adapté. Vous pouvez à ce niveau en concevoir un ou plusieurs.

Vous veillerez à bien préciser (dans le cas de la commande RST) les étapes de votre synthèse.

- Synthèse du correcteur.  
Choix des parties pré caractérisées, du ou des pôles principaux, des pôles auxiliaires.
- Etude de sa robustesse.
- Etude des fonctions de sensibilités.
- Vérification de votre synthèse avec le modèle du processus discrétisé.

5. Validation en simulation.

- Avec le processus continu linéarisé.
- Avec le processus réel.

6. Conclusion.

.